EXERCICE N°1

Pour x réel exprimer en fonction de $\cos x$ et $\sin x$ chacun des réels suivants:

$A = \cos(\frac{\pi}{2} - x) + \cos(2\pi - x) + \sin(x - \pi) + \cos(\pi - x)$

$B = \cos(\frac{5\pi}{2} - x) + \sin(-x + 3\pi) + \sin(\pi + x)$

$C = \cos(\frac{3\pi}{2} - x) + \sin(\frac{17\pi}{3} - x) - \cos(\frac{\pi}{3} - x)$

$D = \cos(\frac{3\pi}{2} + x) + \cos(3\pi + x) + \sin(x + 5\pi) + \sin x$

$E = \cos(\pi - x) + \cos(x + \frac{\pi}{2}) + \sin(\frac{\pi}{2} - x)$

$F = \cos(\frac{3\pi}{2} - x) + \cos(\frac{17\pi}{3} - x) - \sin(\frac{\pi}{3} - x)$

Exercice N°2

1- Montrer que pour tous x et y réels on a : $\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x\cos y$

2- En déduire que pour tout x réel on a : $\cos x+\cos(x+\frac{2\pi}{3})+\cos(x-\frac{2\pi}{3})=0$

EXERCICE N°3

Pour x réel tel que:

$1 + \sin 2x \neq 0$, $\cos 2x \neq 0$ et $\cos x + \sin x \neq 0$

1- Montrer que $\frac{\cos 2x}{1+\sin 2x} = \frac{1-\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$

2- Pour $x = \frac{\pi}{8}$ et sans calculer $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin(\frac{\pi}{8})$ déduire que: $\cot g(\frac{\pi}{8}) = 1 + \sqrt{2}$

3- Transformer alors en $r\cos(x - \varphi)$ L'expression: $(1+\sqrt{2})\cos x + \sin x$

EXERCICE N°4

1- Pour x réel tel que $-\pi < x < 0$ et $\cos(2x) = -\frac{3}{4}$ calculer $\cos x$, $\sin x$ et $\operatorname{tg} x$

2- On pose $A = \cos(\frac{\pi}{6} - 2x) + \cos(\frac{\pi}{6} + 2x)$ exprimer A en fonction de $\cos x$ et $\sin x$

3- Pour $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$. On pose $B = \frac{2\sin x + \sin 2x}{2\sin x - \sin 2x}$, montrer que $B = \operatorname{tg}^2(\frac{x}{2})$ en déduire $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{12})$

4- Soit $f(x) = -1 + \sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x$

a) Transformer $\sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x$ en $r\cos(2x - \phi)$

b) Montrer alors que $f(x) = 1 - 4\sin^2(x + \frac{\pi}{12})$ déduire $\sin(\frac{\pi}{12})$

EXERCICE N°5

1- Montrer que pour tout x réel on a : $4\sin x\cos x\cos 2x=\sin 4x$

2- En déduire $\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}$

3- A l'aide de 2- Montrer que : $\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5} = \frac{1}{2}$

4- Vérifier que $\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}$

5- Calculer les valeurs de $\cos\frac{\pi}{5}$ et $\cos\frac{2\pi}{5}$

Exercice N°6

1- Montrer que $\cos^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$

2- Montrer que $\cos^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8} + \cos^4\frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}$

1- Sachant que $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, donner la valeur de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $tg\frac{\pi}{24}$

2- Montrer que $tg^2\frac{\pi}{12} + tg^2\frac{5\pi}{12} = 14$

Exercice N°7

1- Calculer $A = \sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{7x}{12}$; $B = \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}$

2- Montrer les égalités suivantes

a) $4\sin x\sin(x+\frac{\pi}{3})\sin(x+\frac{2\pi}{3}) = \sin 3x$

b) $\frac{\cos 2x - \cos 4x}{\cos 2x + \cos 4x} = tg 3x\, tg x$

Exercice N°8

Soient $S = \cos(\frac{2\pi}{5}) + \cos(\frac{4\pi}{5})$ et $S' = \cos(\frac{3\pi}{5})\cos(\frac{\pi}{5})$

1- Calculer $2S\sin(\frac{\pi}{5})$ en déduire les valeurs de S et S'

2- Montrer que $\cos(\frac{2\pi}{5})\cos(\frac{4\pi}{5}) = -\frac{1}{4}$ déduire $\cos(\frac{2\pi}{5})$

3- Soient $P_1 = \cos(\frac{\pi}{5})\cos(\frac{2\pi}{5})$ et $Q_1 = \sin(\frac{\pi}{5})\sin(\frac{2\pi}{5})$

Calculer P_1Q_1 et en déduire la valeur de P_1

4- Soient $P_2 = \cos(\frac{\pi}{7})\cos(\frac{2\pi}{7})\cos(\frac{3\pi}{7})$ et

$Q_2 = \sin(\frac{\pi}{7})\sin(\frac{2\pi}{7})\sin(\frac{3\pi}{7})$

Calculer P_2Q_2 en déduire la valeur de P_2

Exercice N°9

1- Montrer que pour tout x réel on a :
$\cos x + \sqrt{3}\sin x = 2\cos(x - \frac{\pi}{3}) = 2\sin(x + \frac{\pi}{6})$

2- Déduire alors que : $\cos(\frac{5\pi}{12}) + \sqrt{3}\sin(\frac{5\pi}{12}) = 2\cos(\frac{\pi}{18})$

3- Déduire donc $\frac{1}{\sin\frac{5\pi}{18}} + \frac{\sqrt{3}}{\cos\frac{5\pi}{18}} = 4$

4- Soit $f(x) = 1 + \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x$

a) Vérifier que $f(x) = 2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\cos x\sin x$

b) Montrer alors que $f(x) = 4\cos x\sin(x + \frac{\pi}{6})$

c) Calculer de deux manières $f(\frac{\pi}{12})$. Déduire alors $\cos\frac{\pi}{12}$

5- Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[- \{\frac{\pi}{6}\}$ on considère $g(x) = \frac{1 + \cos 2x}{1 + \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x}$

a) Montrer que $g(x) = \frac{\cos x}{2\sin(x + \frac{\pi}{6})}$

b) Calculer de deux manières $g(-\frac{\pi}{12})$. Déduire que

$\cot g(\frac{\pi}{12}) = 2 + \sqrt{3}$